



TITLE:

# The mirror symmetry : a historical introduction

AUTHOR(S):

山田, 泰彦

---

CITATION:

山田, 泰彦. The mirror symmetry : a historical introduction. 代数幾何学シンポジウム記録 1993, 1993: 216-228

ISSUE DATE:

1993

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/214593>

RIGHT:

# The mirror symmetry — a historical introduction —

高エネルギー物理学研究所 山田 泰彦

## ① The quintic example

話を具体的にするために、有名な quintic の例から始めます。詳細は original な論文 [1] を見て下さい。

$M$  を  $CP^4$  中の quintic hypersurface とする。  $M$  は Calabi-Yau 3-fold で Hodge 数は

$$h^{2,1}(M) = 101, \quad h^{1,1}(M) = 1$$

である。

$M$  上の degree  $k$  の rational curve の数を  $n_k$  とする時、Candelas 達の得た結果は次の通りである：

$$\begin{array}{ll} n_1 = 2875 & (J. Harris \ '99) \\ n_2 = 609250 & (S. Katz \ '86) \\ n_3 = 317206375 & \\ n_4 = 242467530000 & \\ \vdots & \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{array}} \right\} \text{new results}$$

もう少し詳しく言うと、彼らは 物理で 湯川 couplings と呼ぶとここの次の量

$$\chi = 5 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k k^3 e^{2\pi i k t}}{1 - e^{2\pi i k t}} = 5 + n_1 e^{2\pi i t} + (2^3 n_2 + n_1) e^{2\pi i 2t} + \dots$$

に対して 陽な公식을導いている。

彼らの、この驚くべき計算の idea が タイムに示した mirror 対称性 である。すなわち、もとの多様体  $M$  と mirror の関係にある もう一つの多様体  $W$  を構成し、両者に対する 湯川 couplings を 比較することにより 上記の結果が得られたのである。以下では、このような計算がなされるに至った 背景を簡単に紹介していきます。

## ② String compactification

そもそも 物理学者が Calabi-Yau 多様体を考えるようになった始まりは、論文 [2] における string の compact 化の問題 の考察であった。

String 理論 (詳しくは Super string または Heterotic string 理論) は、

1. 非常に豊かな数学的構造をもち、unique で美しい。
2. 重力も含め この世のすべての現象を説明できる可能性をもつ。

という すばらしい 理論であり、もしもこれが 正しい理論であれば、最近問題となっている「ゼータのすみか」も (それが「この世」にある限り) 説明されるはずの 究極理論である。しかしながら、惜しむらくは、「時空次元が 10 次元においてのみ正しく (無矛盾に) 定式化される」という点に 唯一の欠点をもつ。

string の compact 化 とは、この 10 次元空間に、 $(4 \text{次元}) \times (6 \text{次元})$  という 直積構造を仮定し、内部空間と呼ぶ 6 次元部分に 適当な性質を要求することにより、現実の 4 次元時空にふさわしい string 理論を得ようとする考え方である。論文 [2] では、この考え方に基づき 4 次元理論が  $N=1$  の super symmetry をもつための (十分) 条件として、6 次元空間に対して、Ricci flat が Kähler という条件を導いたのであった。

Calabi-Yau 多様体  $M$  が1つ与えらると、その上に時空を compact 化することにより、1つの 4次元場の理論が得られるわけで、これを  $M$  に対応する effective theory と呼ぶ (図1)。

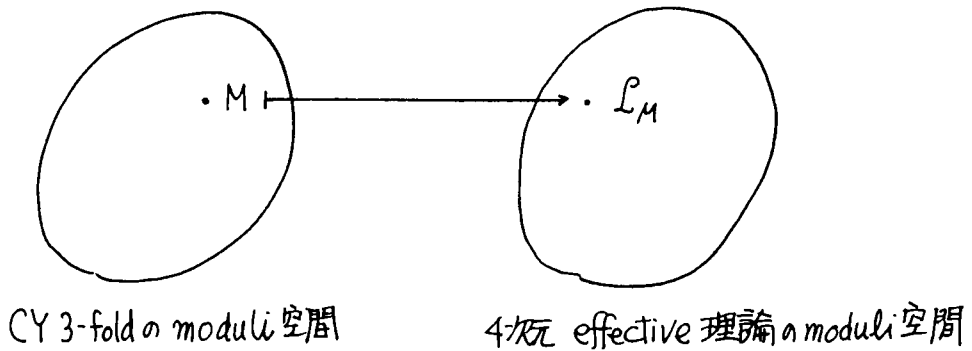


図1

4次元 effective 理論は、通常の場の理論と同様に、Lagrange 関数  $\mathcal{L}_M$  で記述される。 $\mathcal{L}_M$  は一般に場の変数(とその微分)からなる多項式(又は級数)である。そこで、string の compact 化の問題は 次の3つの step で考えらる:

1. 可能な  $M$  を調べ分類すること。
2. 各々の  $M$  に対して  $\mathcal{L}_M$  に関する場を決定すること。
3.  $\mathcal{L}_M$  の具体形を与えること。

1. は CY 多様体の moduli の問題であり、2. は  $M$  の cohomology の計算に関係する。そして 3. の問題の重要な一部分として次にのべる 湯川 coupling の計算が関係するのである。

### ③ Yukawa couplings

前節 2. の問題について もう少し詳しく言うと、次のようになる。

$\mathcal{L}_M$  に関する場としては (2.2) compact 化 という一般的枠組では 以下のようなものが登場する。

- $N=1$  supergravity. 及び  $E_8 \times E_6$  を gauge 群とする super Yang-Mills 場.
- $E_6$  の  $\underline{27}$  又は  $\underline{27}^*$  の変換性をもつ matter 場. 及び各々に対応する moduli 場 (gauge singlet).

このうち、前者は CY 3-fold  $M$  の詳細によらず、普遍的に存在し、対応する  $\mathcal{L}_M$  の形も、対称性だけからほぼ一意的に定まる部分である。これに対して、後者は個々の  $M$  により、その存り方が左右され、例えば  $\underline{27}$  (又は  $\underline{27}^*$ ) 表現の matter 場は  $h^{2,1}(M)$  (又は  $h^{1,1}(M)$ ) 個だけ存在する。又対応する  $h^{2,1}$  (又は  $h^{1,1}$ ) 個の moduli 場は、その真空期待値が  $M$  の形を、すなわち  $M$  の複素構造 (又は Kähler 構造) を決めている。

以上のような状況で、問題 3. を考える時、最初に重要になるのは  $\underline{27}$  (又は  $\underline{27}^*$ ) の三重積の coupling の様子であり、これが 湯川 coupling に他ならない。これら 2 種類の 湯川 coupling については次の公式が知られている。

1).  $(\underline{27})^3$ -couplings: 関係する cohomology 群は  $H^{2,1}(M) \cong H^1(M, \mathbb{Q})$  であり、coupling の係数  $K_{\alpha\beta\gamma}^{2,1}$  は次の trilinear 形式

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{2,1}: H^{2,1} \times H^{2,1} \times H^{2,1} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\begin{matrix} \psi & \psi & \psi \\ \phi_\alpha & \phi_\beta & \phi_\gamma \end{matrix} \mapsto K_{\alpha\beta\gamma}^{2,1} \equiv \int_M \Omega \wedge \frac{\partial^3 \Omega}{\partial z^\alpha \partial z^\beta \partial z^\gamma}$$

で与えられる。ここに  $\Omega \in H^{3,0}(M)$ 、また  $\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$  は  $\phi_\alpha \in H^1(M, \mathbb{Q})$  が Kodaira-Spencer map で定める  $M$  の複素構造の変形の方法である。

$K_{\alpha\beta\gamma}^{2,1}$  は  $\Omega$  を通じて  $M$  の複素構造 moduli  $\mathcal{M}_{2,1}$  の関数である。

(正確には  $\mathcal{M}_{2,1}$  上のある正則直線束の断面、trivialization は  $\Omega$  の

とり方の任意性に対応する。)

2).  $(27^*)^3$ -couplings: 関係する cohomology 群は  $H^{1,1}(M) \cong H^2(M)$  であり, 対応する trilinear 形式は 次で与えられる。

$$K^{1,1}: H^{1,1} \times H^{1,1} \times H^{1,1} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\begin{array}{ccc} \psi_\alpha & \psi_\beta & \psi_\gamma \end{array} \mapsto K_{\alpha\beta\gamma}^{1,1} \equiv \int_M \psi_\alpha \wedge \psi_\beta \wedge \psi_\gamma$$

$$+ \sum_C \int_C \psi_\alpha \int_C \psi_\beta \int_C \psi_\gamma \frac{e^{2\pi i \int_C h}}{1 - e^{2\pi i \int_C h}}.$$

この第二項は (物理で instanton と呼ぶところの) 正則な embedding

$$C: P^1 \rightarrow M$$

についての和 (但し, multiple covering になっているものは除く — それは分母の因子によって考慮されている) で instanton correction term と称する。(137)

$h \in H^{1,1}(M)$  は Kähler form であり, これを通じて  $K_{\alpha\beta\gamma}^{1,1}$  は  $M$  の Kähler 構造 moduli  $\mathcal{M}_{1,1}$  (= 複素化された Kähler cone) の関数となる。

以上のことをまとめると 次の表のようになる。

湯川 couplings	cohomology	deformation
$K^{2,1}$ of $\underline{27}^3$	$H^{2,1}$	$\mathcal{M}_{2,1}$ complex structure
$K^{1,1}$ of $\underline{27}^{*3}$	$H^{1,1}$	$\mathcal{M}_{1,1}$ Kähler structure

前者  $K^{2,1}$  は Picard-Fuchs 方程式などで 周期積分を解析することにより 比較的 やさしく 求められるのに対して, 後者は instanton の数を数えるという むずかしい問題を含む点で 対照的である。

#### ④ Mirror symmetry and mirror map

前節で見たように、Calabi-Yau 3-fold の (従って 4次元の string 理論の) moduli 空間  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{2,1} \times \mathcal{M}_{1,1}$  には、各々の幾何を反映するところの 2 種の湯川 coupling  $K^{2,1}$  及び  $K^{1,1}$  が定義される。この両者は、一見したところ その幾何学的意味も構造も全く関係がなさそうである。にもかかわらず、次の“事実”を期待する物理的な理由が存在する。すなわち、

##### 1) mirror symmetry:

$\forall M: \text{CY 3-fold} \quad \exists W: \text{CY 3-fold} \text{ such that}$

$$h^{p,q}(M) = h^{p,3-q}(W).$$

さらに、もっと詳しく言うと、 $M$  と  $W$  の moduli 空間  $\mathcal{M}, \mathcal{W}$  に対して

##### 2) mirror map:

$\exists \text{ isomorphism } \mathcal{M}_{2,1} \cong \mathcal{W}_{1,1} \text{ (the mirror map) such that}$

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C} & \\ K^{2,1} \nearrow & & \nwarrow K^{1,1} \\ & \mathbb{C} & \\ \mathcal{M}_{2,1} & \longrightarrow & \mathcal{W}_{1,1} \end{array}$$

(及び ここで “2,1” と “1,1” を入れかえた主張)。

最初に述べた [1] での計算の根拠となっているのがここに述べた“事実”である。もちろんこれらの主張は数学的にも物理的にも証明されたものではなく、また状況に応じて適当な修正なり拡大解釈なりを必要とするであろうことは言うまでもない。

## ⑤ Gepner construction

前節で述べたような mirror symmetry を期待する 物理的理由をひと言  
で言ってしまうと string compact化の 幾何学的方法と 代数的(表現論的)  
方法の対応である。string compact化については④でやや冗長に述べ  
たが、そこでの方法は いわば 幾何学的 compact化であった。これに対して  
Gepner [4] に始まる 代数的(表現論的)方法があり、以下で少し詳しく  
述べるように、この方法では  $h^{2,1}$  と  $h^{1,1}$  の部分が全く対等に現われ しかも  
orbifold化 という操作によって両者を入れかえてしまうこともできるのである。

これら 2つの方法が 等価なものであろう というのが 物理学者の漠然とした  
(しかしながらもっともらしい)期待であり、それを とことん 信じた場合の帰結  
が mirror symmetry なのであった。もちろん これを どの程度まで 真剣に  
受け止めるかは 人により様々であった。(実際 Candelas 達の計算 [1] を  
見るまで 大部分の人々は 半信半疑であったと思う。)

それでは この節の残りで、代数的な compact化 = Gepner 構成法 の  
あらすじを述べることにします。

そもそも string 理論とは、よく調合された 共形場理論 なのであって、  
よく調合された という意味は central charge の相殺、modular 不変性等  
の monodromy 不変性の条件、unitary 性等の諸条件を言うのであった。  
とにかく 共形場理論なのであるから Virasoro 代数等の作用する module  
 $\mathcal{H}$  (及びその dual  $\mathcal{H}^\dagger$ ) と そこに作用する 良し作用素たち  $O_\alpha \in \text{End}(\mathcal{H})$   
が定義され、相関関数と呼ばれる量 ( $\langle 0 | \in \mathcal{H}^\dagger, | 0 \rangle \in \mathcal{H}$  は真空)

$$\langle O_{\alpha_1} \cdots O_{\alpha_n} \rangle = \langle 0 | O_{\alpha_1} \cdots O_{\alpha_n} | 0 \rangle$$

が計算される手続きが与えられるわけである。



もとの10次元理論においては 次のような共形場理論が用いられていた。

$$\begin{cases} \text{Right mover} & \mathcal{H}_R = [8\text{つの } X^\mu(z) \text{ と } 8\text{つの } \psi^\mu(z)] \\ \text{Left mover} & \mathcal{H}_L = [8\text{つの } X^\mu(\bar{z})] \otimes [\widehat{E}_8 \otimes \widehat{E}_8 \text{ a level 1 表現}] \end{cases}$$

ここで大切なことは、 $\mathcal{H}_R$  が  $C_R = 8 + \frac{8}{2} = 12$  の N=2 superconformal 代数 の表現で  $\mathcal{H}_L$  が  $C_L = 8 + 16 = 24$  の Virasoro 代数の表現になっている事である。

ここで N=2 superconformal 代数 とは、 $\mathbb{Z}_2$ -graded な無限次元 Lie-super 代数で even な generator  $L_n, J_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) と odd な generator  $G_r^+, G_r^-$  ( $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  or  $\mathbb{Z}$ ) をもち、次の(反)交換関係で定義されている。(  $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  の場合を Neveu-Schwartz sector,  $r \in \mathbb{Z}$  を Ramond sector と呼び、両者は spectral flow と呼ばれる代数の自己同型で互いに移り合う )

$$\begin{cases} [L_m, L_n] = (m-n)L_{n+m} + \frac{C}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0} \\ [L_m, J_n] = -nJ_{n+m} \\ [L_m, G_r^\pm] = (\frac{m}{2}-r)G_{r+m}^\pm \\ [J_m, J_n] = \frac{C}{3}n\delta_{n+m,0} \\ [J_m, G_r^\pm] = \pm G_{r+m}^\pm \\ \{G_r^+, G_s^-\} = 2L_{r+s} + (r-s)J_{r+s} + \frac{C}{3}(r^2 - \frac{1}{4})\delta_{r+s,0} \end{cases}$$

書かれてない、(反)交換子はすべて0であり、Cはcentral chargeである。

Gepner 構成法とは  $C=9$  であるような (Left, Right 共に) N=2 の superconformal model  $\mathcal{H}^{C=9}$  を用意して 次のように string 理論を作ることである。

$$\begin{cases} \mathcal{H}_R = [2\text{つの } X^\mu(z) \text{ と } \psi^\mu(z)] \otimes \mathcal{H}^{C=9} \\ \mathcal{H}_L = [2\text{つの } X^\mu(\bar{z})] \otimes \mathcal{H}^{C=9} \otimes [\widehat{SO}(10) \otimes \widehat{E}_8 \text{ a level 1 表現}] \end{cases}$$

ここで  $C_R = 2 + \frac{2}{2} + 9 = 12$ ,  $C_L = 2 + 9 + 5 + 8 = 24$  と正しい center を与えた。 $\mathcal{H}^{C=9}$  自身の modular 不変量を種にして 全体として modular 不変な string 理論を一般的に構成することができるのである。もとの Gepner 構成法は、さらにこの  $\mathcal{H}^{C=9}$  理論を minimal model と呼ばれる  $C < 3$  の離散的な  $N=2$  代数の表現たちの tensor 積として構成するものであるが、ここでは立ち入らない事にする。

少しだけ説明を加えておくと、minimal model は level とよばれる整数  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  でラベルされその center は  $C = \frac{3k}{k+2}$  で与えられる。Landau-Ginzburg 表示と呼ばれる表示では  $W = X^{k+2}$  という式 (super potential) で記述され、最初に述べた quintic の例では  $k=3$  (従って  $C = \frac{9}{5}$ ) の model の 5 個の tensor 積として実現される。tensor 積の model の potential  $W = \sum_{i=1}^5 X_i^5$  が quintic の 定義方程式に対応しているわけである。

## ⑥ Moduli of $C=9$ theory

この節では geometric な compact 化で  $H^{2,1}$  や  $H^{1,1}$  に対応した matter 場及びそれらの湯川 coupling  $K^{2,1}, K^{1,1}$  が、代数的な方法でどのように表わされるのかを見ることにする。

共形場理論で考えられる良い作用素  $O(z)$  とは primary 作用素 と呼ばれるもので、次の交換関係で定義される

$$[L_n, O(z)] = z^n \left( z \frac{\partial}{\partial z} + h(n+1) \right) O(z)$$

$$[J_n, O(z)] = z^n q O(z)$$

ここに、 $h, q$  は各々 conformal weight,  $U(1)$ -charge と呼ばれる量で

unitary 表現のときには ともに実数で 次の不等式の制限に従う.

$$h \geq |r|q - \frac{C}{6} \left( r^2 - \frac{1}{4} \right) \quad r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \text{ or } \mathbb{Z}.$$

(NS)      (R)

さらに, string 理論では  $q$  の値は 整数 に制限される。(図2).

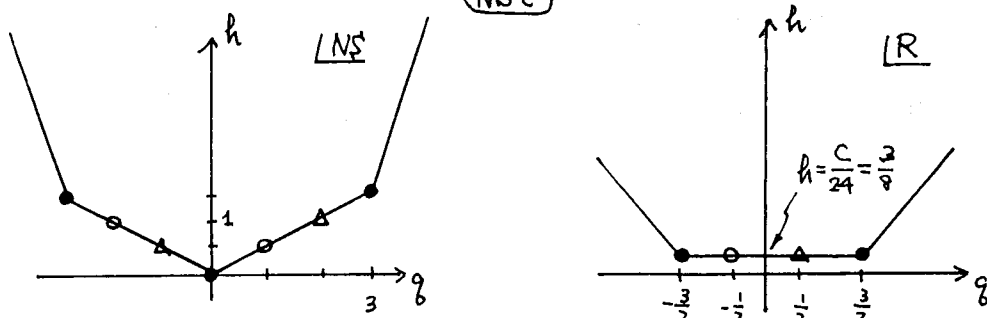


図2.  $C=q$  で許される  $(h, q)$  (おれ線の上) ●, △, ○ の表現は spectral flow で互いに移り合う.

図2に示した  $(h, q)$  をもつ primary 作用素のうち 特に ○ 及び △ に対応するものが cohomology  $H^{2,1}$  及び  $H^{1,1}$  に関係する。このことは、次のような考察により理解することが出来る。

もともと a geometric な表示では  $\mathcal{H}^{C=q}$  の理論は 6つの boson 場  $X^\mu(z)$  と 6つの fermion 場  $\psi^\mu(z)$  (及びその  $\bar{z}$ -dependent な相手方) から出来ていた。 $X^\mu$  が値をとる空間 (その時  $\psi^\mu$  はその接ベクトルに値をとる) が複素構造をもつことに対応して、これらの場は  $X^i, X^{\bar{i}}$  及び  $\psi^i, \psi^{\bar{i}}$  ( $i=1,2,3$ ) に分離する。この分離の下で 以下の作用素たちが定義される。

$$T(z) = g_{i\bar{j}}(X) \left[ \partial X^{\bar{i}} \partial X^j + \frac{1}{2} (\partial \psi^{\bar{i}} \psi^j - \psi^{\bar{i}} \partial \psi^j) \right] = \sum_n L_n z^{-n-2}$$

$$G^+(z) = g_{i\bar{j}}(X) \partial X^{\bar{i}} \psi^j = \sum_r G_r^+ z^{-r-\frac{3}{2}}$$

$$G^-(z) = g_{i\bar{j}}(X) \partial X^i \psi^{\bar{j}} = \sum_r G_r^- z^{-r-\frac{3}{2}}$$

$$J(z) = g_{i\bar{j}}(x) \psi^i \psi^{\bar{j}} = \sum_n J_n z^{-n-1}$$

これは target space metric がほとんど定数という近似の下で  $N=2$  a super conformal 代数を作る。この表示の下では、各 harmonic form に対して次のような作用素を対応させることができる。

$$\psi_{i\bar{j}} \in H^{1,1} \leftrightarrow \Psi \left[ \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{array} \right] (z, \bar{z}) = \psi_{i\bar{j}} \psi^{\bar{j}}(\bar{z}) \psi^i(z)$$

$$\phi_{i\bar{j}\bar{k}} \in H^{2,1} \leftrightarrow \Phi \left[ \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{array} \right] (z, \bar{z}) = \phi_{i\bar{j}\bar{k}} \omega^{\bar{j}\bar{k}} \psi^{\bar{j}}(\bar{z}) \psi^i(z)$$

ここで  $\left[ \begin{array}{cc} h_L & h_R \\ q_L & q_R \end{array} \right]$  で、各 fermion 場に対して、 $h = \frac{1}{2}$ ,  $q = 1$  ( $\psi^i$ ),  $q = -1$  ( $\psi^{\bar{i}}$ ) と定義してある。 $\omega^{\bar{j}\bar{k}}$  は

正則3形式  $\Omega$  の成分である。右辺の具体的表示は別にして、上記の cohomology と作用素の関係は一般的に成立するのである。図2との対応で言うと、

left と right で  $\left\{ \begin{array}{l} 00 \text{ 又は } \Delta\Delta \\ 0\Delta \text{ 又は } \Delta 0 \end{array} \right\}$  と組み合わせた作用素が  $\left\{ \begin{array}{l} H^{2,1} \\ H^{1,1} \end{array} \right\}$  に対応し

という具合になっている事がわかる。このように表現論的見方では  $H^{2,1}$  と  $H^{1,1}$  のちがいは単に left-right を組み合わせる時の  $U(1)$  charge  $q$  の符号だけの問題であることがわかる。

### marginal operator

上記の  $\Psi$  及び  $\Phi$  という作用素は、unitary 条件の境界上に位置する関係から

$\Psi$  : left の  $\bar{G}_{-\frac{1}{2}}^-$  と right の  $G_{-\frac{1}{2}}^+$  で消える

$\Phi$  : left の  $\bar{G}_{-\frac{1}{2}}^+$  と right の  $G_{-\frac{1}{2}}^+$  で消える

という性質をもつ。この性質と  $N=2$  代数とから

$$\sigma_{1,1} = \int d\bar{z} dz \bar{G}_{-\frac{1}{2}}^+ G_{-\frac{1}{2}}^- \Psi$$

$$\sigma_{2,1} = \int d\bar{z} dz \bar{G}_{-\frac{1}{2}}^- G_{-\frac{1}{2}}^- \Phi$$

という作用素は すべての  $N=2$  generators と交換することが示される。

このような作用素は marginal 作用素と呼ばれ、 $N=2$  superconformal 対称性を保たずとも理論を変形するために用いることができる。この意味で matter 場と moduli 場及び cohomology と deformation の関係は表現論レベルでも見てとることができる。特に各 moduli の関数としての湯川 coupling は共形場理論の 3 点関数として次のように表示される。

$$K^{2,1}_{\alpha\beta\gamma} = \langle \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_\gamma \rangle_z = \langle \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_\gamma \exp \left[ \sum_\mu z^\mu \int d\bar{z} dz \bar{G}_{-\frac{1}{2}}^- G_{-\frac{1}{2}}^- \Phi_\mu \right] \rangle$$

$$K^{1,1}_{\alpha\beta\gamma} = \langle \Psi_\alpha \Psi_\beta \Psi_\gamma \rangle_t = \langle \Psi_\alpha \Psi_\beta \Psi_\gamma \exp \left[ \sum_\mu t^\mu \int d\bar{z} dz \bar{G}_{-\frac{1}{2}}^+ G_{-\frac{1}{2}}^- \Psi_\mu \right] \rangle$$

ここに、 $(z^\mu)$ 、 $(t^\mu)$  は  $\mathcal{M}_{2,1}$  及び  $\mathcal{M}_{1,1}$  の座標である。右辺の量は twist して見れば、topological conformal field theory の (deformed) 3-point function に他ならない。

以上に見て来たように、幾何学的には全く様子の異なった 2 つの世界  $\mathcal{M}_{2,1}$  と  $\mathcal{M}_{1,1}$  が代数的には完全に並行に議論ができ、両者のちがいは単に右と左での  $U(1)$  charge の符号のみに帰着されるのである。

## ⑦ Construction of mirror manifolds

⑥ で述べたことから、mirror を代数的に構成するには “ $M$  に対する理論の右と左と分解し、一方の  $U(1)$  charge を反転させて再度 ほうり合わせる” ことにより得られることがわかる。Greene と Plesser は論文 [5] で上記 “...” の操作を orbifold 化という代数的操作で実現する方法を見出した。注目すべき点は彼らの方法は幾何学的立場からも解釈が可能で、mirror mfd に対して一つのかなり一般的な構成法を与えている事である。詳しくは述べられないが彼らの与えた表を引用して説明に代えたい。

symmetry	$h^{2,1}$	$h^{1,1}$	$\chi$
<b>1</b>	101	1	-200
$\mathbb{Z}_5$ (00014)	49	5	-88
$\mathbb{Z}_5$ (01234)	21	1	-40
$\mathbb{Z}_5^2 \left\{ \begin{array}{l} (01144) \\ (01234) \end{array} \right\}$	21	17	-8
$\mathbb{Z}_5$ (01144)	17	21	8
$\mathbb{Z}_5^2 \left\{ \begin{array}{l} (01310) \\ (01103) \end{array} \right\}$	1	21	40
$\mathbb{Z}_5^2 \left\{ \begin{array}{l} (01400) \\ (03011) \end{array} \right\}$	5	49	88
$\mathbb{Z}_5^3 \left\{ \begin{array}{l} (01234) \\ (01144) \\ (00014) \end{array} \right\}$	1	101	200

表にある mfd はすべて  $P^4$  内の quintic を symmetry  $(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_5) : x_i \mapsto \omega^{\alpha_i} x_i \quad (\omega^5 = 1)$$

であって singularity を blow up したものである。Candelas 達の例は、この最初と最後の pair を用いたものである。

### 文献

- [1] Candelas et al Nucl. Phys. B359 (1991) 21.
- [2] Candelas et al Nucl. Phys. B258 (1985) 46.
- [3] Dine et al Nucl. Phys. B278 (1986) 769, B289 (1987) 319.
- [4] Gepner Phys. Lett. B199 (1987) 380.
- [5] Greene & Plesser Nucl. Phys. B338 (1990) 15.